



Comparação de integradores numéricos na simulação de trajetórias ao redor do asteroide Itokawa com potencial perturbador até sexta ordem

Luan Henrique Glasser¹, Hélio Koiti Kuga²,
Evandro Marconi Rocco³, Marcelo Lisboa Mota⁴

¹ Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Aluno de Mestrado do curso de Engenharia e Tecnologia Espaciais - CMC

² Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Mecânica Espacial e Controle - CMC

³ Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Mecânica Espacial e Controle - CMC

⁴ Instituto Federal de São Paulo, Hortolândia, SP, Brasil

luan.glasser@gmail.com

Resumo. Neste trabalho é feito um estudo de trajetórias ao redor do asteroide Itokawa, do efeito das perturbações gravitacionais e uma comparação de dois integradores numéricos. As simulações são realizadas utilizando o método da expansão do potencial em série e consideram o semieixo maior igual a 0,5 km, com demais elementos orbitais nulos, como condição inicial. A perturbação do potencial do asteroide é estudada progressivamente até a sexta ordem da série expandida e o efeito das perturbações de cada termo é avaliado. As integrações numéricas são feitas, em maior parte, com um Runge-Kutta de ordem 4 e no fim o desempenho deste integrador é comparado com o preditor-corretor de Adams-Bashforth-Moulton, inicializado por um Runge-Kutta de ordem 5. Os resultados da comparação corroboram com o esperado, de que o segundo integrador é superior em tempo de computação com relação ao primeiro.

Palavras-chave: simulação, integração numérica, trajetórias orbitais, asteroide Itokawa.

1. Introdução

Em 1998, o asteroide 25143 Itokawa foi descoberto. A partir de medidas feitas pelo rádio telescópio Arecibo, foi possível determinar que o asteroide possuía dimensões médias de $(0,5481 \times 0,3122 \times 0,2751) \pm 10\%$ km e massa de $6,025 \times 10^9$ kg, com densidade uniforme de $2,5 \text{ g/cm}^3$, e um período de rotação de 12,132 h (MOTA, 2017). Em 2003, a JAXA lançou para Itokawa a sonda espacial Hayabusa, cujo objetivo era estudar o asteroide e trazer amostras de volta para a Terra. Os artigos de UO et al. (2006) e Yoshikawa et al. (2015) apresentam informações sobre como se deu esse processo, dificuldades e êxitos da missão.



O problema de orbitar um asteroide como Itokawa, cuja distribuição de massa é irregular, é desafiador. Explorar os tipos de trajetórias possíveis pode ajudar na compreensão a respeito de como um veículo se comporta ao orbitar o asteroide, o que, por sua vez, pode servir de insumo para pesquisas e missões no futuro. Essa é a ideia que orienta este trabalho, cujo objetivo é estudar órbitas nos arredores de Itokawa com simulações.

O objetivo é dividido em três partes: (1) um passo de integração razoável é selecionado, por meio da comparação de resultados de diferentes simulações e critérios apresentados adiante; (2) simulações considerando as perturbações gravitacionais de Itokawa, de ordem 1 a 6, são realizadas e os resultados são avaliados; (3) a dinâmica perturbada, obtida pelo método da expansão do potencial em série até sexta ordem (MOTA, 2017), é integrada tanto com um Runge-Kutta (RK) de ordem 4 (RK4) quanto com um método de integração preditor-corretor (PC), que se utiliza das fórmulas de Adams-Bashforth-Moulton (ABM), inicializado por um Runge-Kutta de ordem 5 (RK5).

2. Metodologia

2.1. Integração numérica

Integradores numéricos foram construídos de acordo com Kuga et al. (2011) e Franco (2006), para a realização das simulações. Para entender seu funcionamento, considere a equação diferencial ordinária (EDO), mostrada na Equação 1. A solução desse tipo de equação consiste em encontrar uma função $x(t)$, diferenciável em t , pertencente ao intervalo de tempo $[t_0, t_f]$, tal que $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Dois tipos de integradores numéricos são utilizados para resolver esse problema: os de RK e o PC com as fórmulas de ABM.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \quad (1)$$

Segundo Kuga et al. (2011), o método de RK4 é descrito por

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4). \end{aligned} \quad (2)$$

Segundo Mathews e Fink (2003), um método de RK5 é descrito por



$$\begin{aligned}k_1 &= hf(t_n, x_n), \\k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1\right), \\k_3 &= hf\left(t_n + \frac{3}{8}h, x_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\k_4 &= hf\left(t_n + \frac{12}{13}h, x_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\k_5 &= hf\left(t_n + h, x_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\k_6 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right), \\x_{n+1} &= x_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_2 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6.\end{aligned}\tag{3}$$

O ABM difere do método de RK, pois utiliza resultados calculados em passos anteriores da integração para extrapolar o resultado do próximo passo. Há um processo no ABM que envolve prever um valor para o próximo passo e depois corrigi-lo, por isso a denominação PC. O método é descrito pelas Equações 4, nas quais a variável x_{n+1}^P representa a previsão e a x_{n+1}^C a correção do valor integrado. Este método é mais complexo de implementar, por causa da previsão-correção. Apesar disso, ele é mais rápido que o RK4, porque computa a dinâmica apenas duas vezes por passo de integração, uma na predição e outra na correção, enquanto o RK4 faz isso quatro vezes por passo de integração.

$$\begin{aligned}x_{n+1}^P &= x_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}), \\x_{n+1}^C &= x_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1}^P + 19f_n - 5f_{n-1} - f_{n-2}).\end{aligned}\tag{4}$$

2.2. Modelo dinâmico

Considere o asteroide Itokawa e um sistema de coordenadas $OXYZ$ fixo em seu centro de massa. O eixo X deve ter a direção da maior dimensão média, Z o da menor e Y completa o sistema dextrógiro. O corpo do asteroide, que tem uma distribuição irregular de massa, tem um potencial gravitacional U , de cujo gradiente a dinâmica depende.

Segundo Kuga et al. (2011) e Mota (2017), o vetor aceleração $\ddot{\mathbf{r}}$ do veículo em torno do asteroide é dado pela Equação 5.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2}{dt^2}[x, y, z]^T = \nabla U = \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right]^T.\tag{5}$$

O método da expansão do potencial em série até sexta ordem, desenvolvido por Mota (2017), é dado pela Equação 6 e modela o potencial gravitacional de Itokawa.



$$\nabla U = \nabla U_0 + \sum_1^6 \nabla U_i. \quad (6)$$

O gradiente de U_0 resulta no movimento kepleriano. O termo do somatório contém as perturbações geradas pelo potencial de Itokawa, das ordens de 1 a 6. As expressões para cada U_i são mostradas da Equação 7 à 13.

$$U_0 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (7)$$

$$U_1 = \frac{\mu}{\rho^3}(-A_1x + B_1y - C_1z), \quad (8)$$

$$U_2 = \frac{\mu}{\rho^5}(A_2x^2 - B_2y^2 - C_2z^2 + D_2xy + E_2xz + F_2yz). \quad (9)$$

$$U_3 = \frac{\mu}{\rho^7}(-A_3x^3 + B_3y^3 - C_3z^3 - D_3x^2y + E_3xy^2 - F_3x^2z - G_3xyz + H_3y^2z + I_3xz^2 + J_3yz^2). \quad (10)$$

$$U_4 = \frac{\mu}{\rho^9}(A_4x^4 + B_4y^4 + C_4z^4 + D_4x^3y - E_4x^2y^2 - F_4xy^3 + G_4x^3z + H_4x^2yz + I_4xy^2z - J_4y^3z - K_4x^2z^2 - L_4xyz^2 + M_4y^2z^2 - N_4xz^3 - O_4yz^3). \quad (11)$$

$$U_5 = \frac{\mu}{\rho^{11}}(-A_5x^5 - B_5y^5 + C_5z^5 - D_5x^4y + E_5x^3y^2 + F_5x^2y^3 - G_5xy^4 - H_5x^4z - I_5x^3yz + J_5x^2y^2z + K_5xy^3z - L_5y^4z + M_5x^3z^2 + N_5x^2yz^2 - O_5xy^2z^2 - P_5y^3z^2 + Q_5x^2z^3 + R_5xyz^3 - S_5y^2z^3 - T_5xz^4 - U_5yz^4). \quad (12)$$

$$U_6 = \frac{\mu}{\rho^{13}}(A_6x^6 - B_6y^6 - C_6z^6 + D_6x^5y - E_6x^4y^2 - F_6x^3y^3 + G_6x^2y^4 + H_6xy^5 + I_6x^5z + J_6x^4yz + K_6x^3y^2z - L_6x^2y^3z - M_6xy^4z + N_6y^5z - O_6x^4z^2 - P_6x^3yz^2 + Q_6x^2y^2z^2 + R_6xy^3z^2 - S_6y^4z^2 - T_6x^3z^3 - U_6x^2yz^3 - V_6xy^2z^3 + W_6y^3z^3 + X_6x^2z^4 + Y_6xyz^4 - Z_6y^2z^4 + AA_6xz^5 + AB_6yz^5). \quad (13)$$



Nessas equações, $\mu = GM$ é o parâmetro gravitacional de Itokawa, G é a constante de gravitação universal e M a massa do asteroide. O módulo da posição é dado $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Os coeficientes das equações foram apresentados em termos de A_i , B_i , C_i e assim por diante. Seus valores numéricos estão na Tabela 1.

Tabela 1. Coeficientes do potencial de Itokawa [Fonte: (MOTA, 2017)].

Coeficientes \ Termos	1	2	3	4	5	6
A	0,0000000000015	0,0116982985530	0,0001492215922	0,0002742877061	0,0000042947480	0,0000078500458
B	0,0000000000013	0,0050849757170	0,0000573001189	0,0000865972678	0,0000022354695	0,0000020060350
C	0,0000000000003	0,0066133228350	0,0000026869670	0,0001225886896	0,0000002415169	0,0000030429784
D		0,0000000000008	0,0002433573140	0,0000614457124	0,0000215009266	0,0000057211820
E		0,0000000000024	0,0004384778036	0,0007148888529	0,0000331488423	0,0000504293849
F		0,0000000000007	0,0000526931482	0,0000453015835	0,0000296515204	0,0000138851139
G			0,0002820754429	0,0000178654306	0,0000130964489	0,0000364242228
H			0,0000607540493	0,0000279683915	0,0000031843945	0,0000034233364
I			0,0000091869730	0,0000004034839	0,0000385354267	0,0000008054755
J			0,0000714569573	0,0000076204849	0,0000142085308	0,0000067524665
K				0,0009308373838	0,0000150124513	0,0000038053156
L				0,0000484323867	0,0000003441980	0,0000062945658
M				0,0001953052461	0,0000097986377	0,0000014658113
N				0,0000179999252	0,0000400509983	0,0000004285889
O				0,0000017023123	0,0000208678337	0,0000673213026
P					0,0000072968252	0,0000155564786
Q					0,0000016326121	0,0000840309725
R					0,0000235229755	0,0000074219776
S					0,0000040477808	0,0000063336971
T					0,0000014213466	0,0000039533568
U					0,0000030267538	0,0000072103673
V						0,0000008736930
W						0,0000006695590
X						0,0000533161405
Y						0,0000040672505
Z						0,0000076714650
AA						0,0000012733763
AB						0,0000005201690

2.3. Sobre a implementação

As simulações foram escritas na linguagem de programação Python. O fundamento lógico das simulações é descrito a seguir. Uma função propagadora recebe o estado inicial, o tempo inicial, o tempo final, o passo de integração, a função do integrador numérico desejado e a função com dinâmica do sistema. Para cada passo de integração, a função propagadora executa a função da dinâmica e determina os diferenciais de estado. Então a função propagadora usa a função de integração para integrar esses diferenciais. Realizada essa operação, os resultados são armazenados e os contadores, que controlam as iterações, são atualizados. Esse processo prossegue até que o tempo final seja atingido e vale tanto para os RK quando para o ABM.

3. Resultados e Discussão

As unidades de medida usadas são as seguintes e valem para todos os resultados: km, para a posição; s, para o tempo; kg, para a massa. Além disso, para simplificar o estudo, a rotação do asteroide foi desconsiderada. Para validação da implementação do modelo da perturbação do potencial gravitacional, os resultados obtidos com o modelo implementado neste trabalho foram comparados com resultados fornecidos pelo ambiente de simulação *Spacecraft Trajectory Simulator* (STRS), desenvolvido por Rocco (2013) e utilizado por Mota (2017).

3.1. Um passo de integração razoável

A escolha do passo de integração das simulações é em função dos seguintes critérios: (1) deve ser tal que a computação seja realizada em no máximo dois minutos para uma integração de 36.000 s, que é aproximadamente 1 período orbital; (2) deve gerar resultados coerentes, se for feita a comparação com resultados de maior qualidade.



As condições iniciais e de integração são as seguintes: semieixo maior $a = 0,5$ km; demais elementos orbitais nulos; tempo de integração: 36.000 s; passos de integração: 100 s, 1 s, 0,1 s e 0,01 s. Partindo dessas condições, simulações são feitas com o RK4. Os resultados do último instante de tempo calculado para cada uma das condições iniciais estão na Tabela 2, para a posição do veículo. Para a direção X , os resultados são compatíveis até a quarta casa decimal, o que implica numa diferença da ordem de centímetros. Para a direção Y , a diferença dos resultados é da ordem de milímetros. Para a direção Z , a diferença é da ordem de micrômetros.

Tabela 2. Resultados de posição para diferentes passos de integração.

Resultados de posição por passo de integração			
h	x	y	z
100	0,132690113273	0,455245228490	0,000547161529
1	0,132690147214	0,455245216318	0,000547161373
0,1	0,132681380109	0,455246800759	0,000547165692
0,01	0,132689270505	0,455245374769	0,000547161805

Na Tabela 3, esses resultados são comparados com a métrica de desvio relativo mostrada na Equação 14. A variável e é a diferença proporcional entre o resultado obtido com um passo de integração maior com relação ao obtido com um passo de integração menor. A variável R é a magnitude de posição. A ideia dessa métrica é conseguir um valor que meça quanto o resultado obtido com um passo menor de integração é menor ou maior, proporcionalmente, ao resultado obtido com passo de integração maior.

$$e = \frac{R_{\text{passo maior}} - R_{\text{passo menor}}}{R_{\text{passo menor}}}. \quad (14)$$

Tabela 3. Comparação de resultados de posição entre passos de integração. Cada célula contém um valor que mostra quanto o resultado menor varia com relação ao resultado de passo maior.

Comparação de resultados da posição orbital por passo				
h	100	1	0,1	0,01
100	0	-0,0000000046	-0,0000020	0,00000032
1	-	0	-0,0000020	0,00000034
0,1	-	-	0	0,0000018
0,01	-	-	-	0

Na Tabela 3, cada célula correspondente a dois passos de integração diferentes mostra o resultado da aplicação da Equação 14 nos resultados finais de magnitude de posição de cada passo. Uma interpretação dos números sugere que os resultados para a magnitude posição, com o passo de 1 s, são praticamente os mesmos que os obtidos com passo de 100 s, variando no nono dígito significativo. A diferença entre os resultados para o passo de 100 s e de 1 s, com relação ao passo de 0,1 s, são iguais até o sexto dígito significativo. As diferenças dos passos de 100 s e de 1 s com relação ao passo de 0,01 s são da ordem do oitavo dígito significativo. O passo de 0,1 s, com relação ao de 0,01 s, teve uma diferença da ordem de 6 dígitos significativos.

Considerando as condições iniciais, a velocidade orbital na direção Y para o instante inicial é de 0,000090 km/s. Se uma órbita kepleriana com essas condições iniciais fosse considerada, após



1 passo de integração, o veículo teria se deslocado cerca de 9 cm. Se um passo de integração de 0,1 s fosse adotado, o veículo se deslocaria, seguindo o mesmo raciocínio, cerca de 9 mm.

Tanto do passo de 100 s para 0,1 s quanto do passo de 1 s para 0,1 s, a diferença de resultados para magnitude de posição no instante final integrado foi de cerca de 2 mm. Isso sugere que, para o período de tempo integrado, quase não há diferença se a integração for feita com um passo de 100 s ou com um passo de 1 s. Entretanto, para um passo de 100 s, o veículo se deslocaria cerca de 9 m a cada passo, considerando o movimento kepleriano. Se a órbita fosse perturbada, as perturbações seriam calculadas de 100 s em 100 s, o que poderia gerar erros maiores nos resultados para um tempo de integração final mais elevado. Assim, o passo de 100 s não é adequado.

Um passo de 0,01 s, por ser menor, deve gerar resultados mais precisos, mas é custoso computacionalmente, não atendendo ao critério de integração de 36.000 s em no máximo dois minutos. O mesmo vale para o passo de 0,1 s. Assim, com base nessa exposição, **o passo de integração considerado para os fins deste trabalho é o de 1 s**, que gera resultados próximos do passo de 0,1 s, computa a perturbação de segundo em segundo e tem um custo computacional adequado ao que se deseja mostrar neste trabalho.

3.2. Análise do movimento na vizinhança de Itokawa

O modelo do potencial do asteroide contém os seguintes termos: U_0 , cujo gradiente gera o movimento kepleriano, e U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 e U_6 , cujos gradientes perturbam o movimento. Nas simulações a seguir, progressivamente, as perturbações são adicionadas para gerar resultados que vão do $U_0 + U_1$ ao $U_0 + \dots + U_6$. As condições iniciais e de integração são: $a = 0,5$ km; demais elementos orbitais nulos; tempo de integração: 108.000 s; passo de integração: 1 s.

A Figura 1 mostra os resultados para o movimento kepleriano. A órbita simulada é circular, portanto a posição e velocidade em X e Y oscilam sem variação de amplitude de posição além de $\pm 0,5$ km e de velocidade além de 0,000090 km/s. O eixo Z mostra um comportamento oscilatório na posição e velocidade, mas numa ordem de grandeza desprezível. Nenhum efeito significativo pode ser observado, com relação ao comportamento kepleriano, ao se adicionar o termo U_1 na simulação.

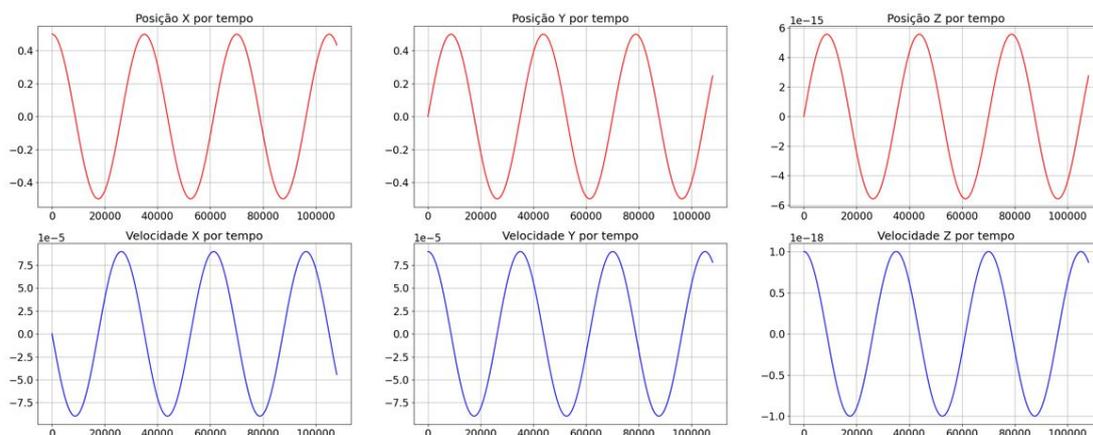


Figura 1. Órbita kepleriana de um veículo ao redor de Itokawa.

O termo U_2 adicionado à simulação gera a Figura 2. Com relação ao comportamento visto na Figura 1, a adição dessa perturbação produz cerca de meia oscilação a mais no comportamento



dos eixos X e Y . Em Z , a variação de amplitude ainda é desprezível. O termo U_3 afeta principalmente o comportamento no eixo Z , como pode ser visto na Figura 3. Há um indicativo de que a amplitude da posição e da velocidade começam a aumentar, devido à presença desse novo termo perturbador.

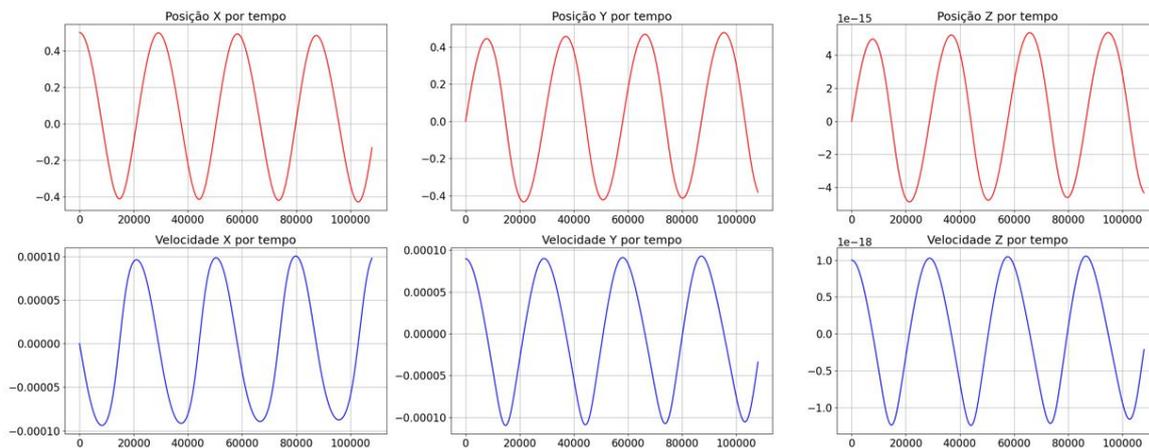


Figura 2. Órbita de um veículo ao redor de Itokawa, perturbado pelos termos até U_2 .

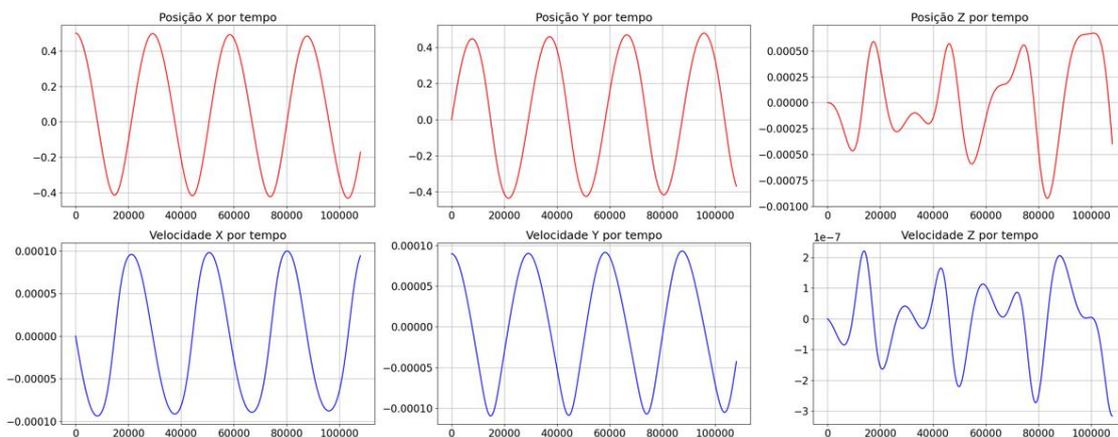


Figura 3. Órbita de um veículo ao redor de Itokawa, perturbado pelos termos até U_3 .

A Figura 4 mostra o comportamento para as perturbações até o termo U_4 . Essa figura também é representativa para o comportamento perturbado pelos termos até U_5 e U_6 , já que, visualmente, não seriam notadas diferenças para essa escala dos gráficos. Analisando a figura, parece não haver mais afetação sobre os eixos X e Y , exceto por uma suave tendência de crescimento na amplitude das oscilações, enquanto torna-se cada vez mais relevante a perturbação sobre o eixo Z , que mostra um movimento oscilatório de amplitude crescente tanto na posição quanto na velocidade.

A Figura 5 mostra que o incremento de posição do movimento perturbado até a ordem 6, com relação ao kepleriano, aumenta nos eixos X e Y , conforme a órbita progride. Na escala do gráfico, nada pode ser afirmado sobre os incrementos de posição em Z . É possível concluir que o semieixo maior da órbita tende a aumentar, com relação ao da órbita kepleriana, dentro desse envelope de condições iniciais e de integração.

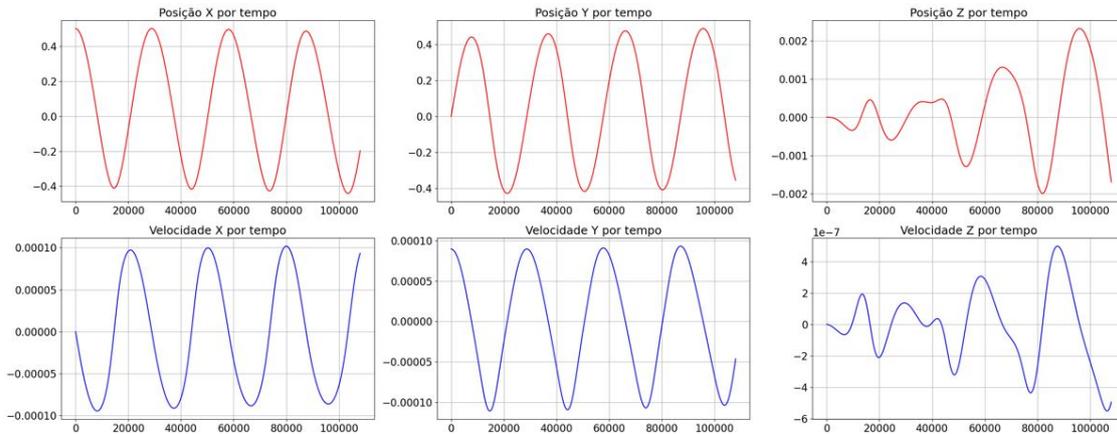


Figura 4. Órbita de um veículo ao redor de Itokawa, perturbado pelos termos até U_4 .

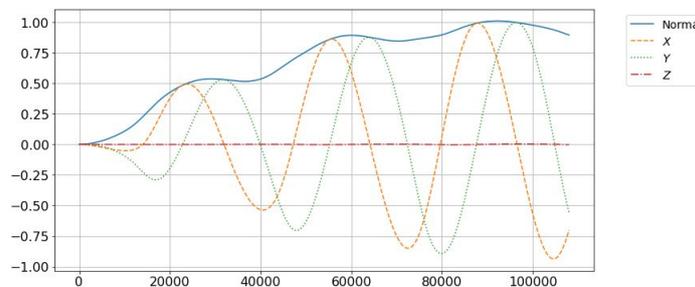


Figura 5. Incrementos de posição com relação à órbita kepleriana das perturbações até U_6 .

3.3. Desempenho dos integradores RK4 e ABM

São realizadas duas simulações considerando os termos até ordem 6, para comparar o desempenho do ABM, inicializado por um RK5, com o do RK4. As condições iniciais e de integração são as mesmas anteriores, mas com tempo de integração de 36.000 s. A partir das simulações, a Tabela 4 é obtida. Nela, os últimos resultados para a posição (em km) dos dois integradores são mostrados, além dos tempos consumidos por cada integrador (em s). De acordo com a Tabela 4, tanto o RK4 quanto o ABM chegam no mesmo resultado, para as condições iniciais utilizadas. Entretanto, o tempo gasto pelo RK4 foi de 51,84 s, enquanto o tempo gasto pelo ABM foi de 13,46 s. Desse modo, o tempo do ABM é aproximadamente 74% menor que o do RK4.

Integrador	x	y	z	Tempo consumido
RK4	0,13269015	0,45524522	0,00054716	51,84
ABM	0,13269015	0,45524522	0,00054716	13,46

Tabela 4. Comparação entre integradores RK4 e ABM inicializado com um RK5.

O desempenho superior do ABM pode ser explicado pelo número de vezes que cada integrador computa a dinâmica do sistema. O ABM faz isso 2 vezes por passo, enquanto o RK4 faz 4 vezes. O ABM também armazena variáveis já computadas, reutilizando-as nos próximos passos de integração, o que não ocorre no RK4. Conclui-se que o ABM é superior ao RK4 para o problema tratado, apesar de exigir um gasto adicional de memória para armazenamento dos coeficientes de interpolação do PC.



4. Conclusão

A intenção deste trabalho foi fazer um estudo numérico, com simulações, das trajetórias feitas por um veículo nos arredores do asteroide Itokawa. As integrações numéricas foram baseadas em um modelo do potencial gravitacional obtido pelo método da expansão do potencial em série. As equações desse modelo são polinomiais, o que facilitou o trabalho de derivação para encontrar os gradientes do potencial e a implementação.

Para realizar as simulações, foi necessário definir um passo de integração para os integradores numéricos. Para este trabalho, o passo de 1 s mostrou-se suficiente. Com o passo de integração definido, o movimento perturbado do veículo pelo potencial gravitacional de Itokawa foi simulado e analisado.

Para um semieixo maior inicial de 0,5 km, demais elementos orbitais nulos, tempo final de integração de 108.000 s e passo de integração de 1 s, foi observado que perturbações até U_2 e U_3 provocam uma variação positiva de frequência de cerca 50%, com relação a uma órbita kepleriana integrada pelo mesmo intervalo. As perturbações até U_3 fazem com que a trajetória em Z ganhe um movimento oscilatório e crescente. As perturbações até U_4 , U_5 e U_6 fazem com que o comportamento em Z oscile e aumentam a amplitude de oscilação. As perturbações até ordem 6 fazem com que o semieixo maior cresça ao longo do tempo.

O desempenho de dois métodos de integração foi analisado por fim. O primeiro método foi o RK4. O segundo método foi o ABM, inicializado com um RK5. Em comparação, o ABM mostrou ter um desempenho, em termos de tempo de computação, aproximadamente 74% menor que o RK4.

Agradecimentos: À CAPES, pelo financiamento.

Referências

- FRANCO, N. M. B. *Cálculo numérico*. 1. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2006. 505 p. ISBN (8576050870).
- KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. R. *Satélites artificiais - movimento orbital*. 1. ed. São José dos Campos, SP: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2011. 96 p.
- MATHEWS, J. H.; FINK, K. K. *Numerical methods using matlab*. 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003. 662 p. ISBN (0130652482).
- MOTA, M. L. *Modelo do campo gravitacional de um corpo com distribuição de massa irregular utilizando o método da expansão do potencial em série e determinação de seus coeficientes dos harmônicos esféricos*. 277 p. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, SP, 2017. Disponível em: <<http://urlib.net/ibi/8JMKD3MGP3W34P/3PQ2FAB>>. Acesso em: 10 out. 2021.
- ROCCO, E. M. Automatic correction of orbital elements using continuous thrust controlled in closed loop. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 465, n. 1, p. 012007, 2013.
- UO, M. et al. Hayabusa touching-down to itokawa - autonomous guidance and navigation. *The Journal of Space Technology and Science*, Japanese Rocket Society, v. 22, n. 1, p. 1_32–1_41, 2006.
- YOSHIKAWA, M.; KAWAGUCHI, J.; FUJIWARA, A. Hayabusa sample return mission. *Asteroids IV*, University of Arizona Press, v. 1, n. 397-418, p. 1, 2015.